$\Mathbb{Z}_4$-graded Lie環の巾零軌道とdual pair $(U(p,q),U(r,s))のmoment mapの幾何 (新世紀への表現論と調和解析)

太田, 琢也

数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 117-134

$\mathbb{Z}_4$-graded Lie 環の巾零軌道と dual pair $(U(p,q), U(r,s))$ の moment

東京電機大学・工学部　太田琢也 (
Tokyou De

0. 序

[KP1] において、H.Kraft と C.Procesi は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の巾零軌道の閉包と $\mathfrak{gl}(r$
0) の巾零軌道の閉包の間に、次のような特異点の duality があることを示し

[KP1]、列の除去 η、σ をそれぞれ $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の巾零軌道 C_η、C_σ に対応する
し、η、σ は $n-m$ 個の（空でない）行をもつものとする。η'、σ' をそれぞ
第１列を消去することにより得られる Young 図形とし、対応する $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$
$C_{\eta'}$、$C_{\sigma'}$ とする。このとき、もし、$\overline{C_\eta} \supset C_\sigma$ なら、$\overline{C_{\eta'}} \supset C_{\sigma'}$ であって、次

$$Sing(\overline{C_\eta}, C_\sigma) = Sing(\overline{C_{\eta'}}, C_{\sigma'})$$

(smooth equivarence class $Sing(\ ,\ )$ の定義については、 Definition 2.15 を参

さらに、彼らは [KP2] において、対 $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}))$ の代わりに複素 Lie 環
をとっても、同様の duality があることを示した。彼らの結果の analogue と
[O1]、[O2] において、次の複素 symmetric pair の対の巾零軌道の閉包の間に
があることを示した。

$((\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})),(\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(m,\mathbb{C})))$,

$((\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})),(\mathfrak{gl}(2m,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})))$ (以上 [O1]),

$((\mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})+\mathfrak{gl}(q,\mathbb{C}))),((\mathfrak{gl}(r+s,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})+\mathfrak{gl}(s,\mathbb{C}))),$

$((\mathfrak{o}(p+q,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(p,\mathbb{C})+\mathfrak{o}(q,\mathbb{C})),(\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})))$,

$((\mathfrak{sp}(p+q,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{C})+\mathfrak{sp}(q,\mathbb{C})),(\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})))$ (以上 [O2])

近年、筆者は西山享氏の指摘により、この duality を与える商写像の対が、
moment map であることを知った。Kraft、Procesi の場合は複素 dual pair に

の場合が実 dual pair に対応する。西山氏は、dual pair $(U(p,q),U(r,s))$, $(O(p,q),Sp(2n,\mathbb{R}))$, $(Sp(p,q),O^*(2n))$ が stable range のとき、巾零軌道の θ-lifting を定義し ([N3])、これを用いて、小さな巾零軌道の閉包の幾何学的構造、及びその正則函数環の構造に関する結果を得ている ([N1],[N2])。また、いくつかの例で、この巾零軌道の対応が、表現の Howe 対応と compatible になっていることが示されている ([N4],[NZ],[NOT],[Y])。

本稿では、dual pair $(U(p,q),U(r,s))$ の moment map

$$\mathfrak{s}(V) \leftarrow \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{s}(U)$$

が $\mathfrak{gl}(p+q+r+s,\mathbb{C})$ の、ある $\mathbb{Z}_4$-gradation から得られることを示し、これを用いて、monent map を通して定まる $\mathfrak{s}(V)$, $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{s}(U)$ の巾零軌道の集合の間の対応

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V))/K(V) \leftarrow \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/K(V)\times K(U) \rightarrow \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U))/K(U)$$

を explicite に記述する。さらに、ある弱い仮定 (Assumption 2.4) のもとに、$\mathfrak{g}_i$ (resp. $\mathfrak{s}(U)$) の open subvariety $\mathfrak{g}_i'$ (resp. $\mathfrak{s}(U)'$) 及び、$\mathfrak{s}(V)$ の locally closed subvariety $\mathfrak{s}(V)'$ が定まり、ρ,π をこれらの巾零多様体に制限すると、上への smooth morphism

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)') \overset{\rho|\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')}{\longleftarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i') \overset{\pi|\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')$$

が得られ、これが巾零軌道の集合の間の全単射

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V) \overset{\sim}{\longleftarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')/K(V)\times K(U) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U)$$

を与える。さらに、この全単射は closure relation 及び、特異点の同値類を保つ対応になっていることをみる。上の全単射からくる対応

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V)$$

は西山氏の stable range の場合の θ-lifting の一般化になっている。

§1. $\mathbb{Z}_m$-graded Lie 環の巾零軌道

(1.1) $\mathbb{Z}_m$-graded Lie 環

G を reductive な複素代数群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環、m を正の整数とする。$\Theta : G \rightarrow G$ を G の自己同型で $\Theta^m = id$、かつ $\Theta^j \neq id$ $(1 \leq j < m)$ であるものとする。Θ が誘導する Lie 環の自己同型をも $\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ で表す。$\zeta := e^{2\pi i/m}$ とし、次のようにおく。

$$G_1 = \{g \in G; \Theta(g) = g\}\ ,\quad \mathfrak{g}_\delta := \{X \in \mathfrak{g}; \Theta(X) = \delta X\}\ (\delta \in <\zeta>),$$

ここに $<\zeta>$ は ζ により生成される $\mathbb{C}^\times$ の乗法部分群である。このとき $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \oplus_{\delta\in<\zeta>}\mathfrak{g}_\delta$$

と分解され、$\mathbb{Z}_m$-graded Lie 環を得る。各 $\delta \in <\zeta>$ に対し、G_1 は随伴作用で $\mathfrak{g}_\delta$ に作用する。本稿では G_1 の $\mathfrak{g}_\zeta$ への表現 $(G_1\ ,\mathfrak{g}_\zeta)$ を Θ 表現と呼ぶことにする。

(1.2) ベクトル空間の自己同型が定める Θ 表現の巾零軌道の分類

V を有限次元の複素ベクトル空間、m を正の整数、$S : V \to V$ は V の線形な自己同型であって、$S^m = id$、$S^j \neq id$ $(1 \leq j < m)$ を満たすものとする。$G = GL(V)$、$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ とおく。S は G の自己同型 $\Theta : G \to G, \Theta(g) = SgS^{-1}$ $(g \in G)$ を定める。(1.1) のように、$\zeta := e^{2\pi i/m}$ とおくと、Θ 表現 $(G_1\ ,\mathfrak{g}_\zeta)$ を得る。$\delta \in <\zeta>$ に対して $V_\delta := \{v \in V; Sv = \delta v\}$ とおくと V は

$$V = V_1 \oplus V_\zeta \oplus V_{\zeta^2} \oplus ... \oplus V_{\zeta^{m-1}}$$

と分解され $\mathfrak{g}_\zeta$ は

$$\mathfrak{g}_\zeta = \{X \in \mathfrak{g}; XV_\delta \subset V_{\zeta\delta}\ (\delta \in <\zeta>)\}$$

と表される。$\mathfrak{g}_\zeta$ の巾零元の集合を $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ で表す。$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ の G_1 軌道を記述するために、次の概念を導入する。

Definition 1.1 (i) 各 box に、$<\zeta>$ の元を入れた Young 図形 η で、$\delta \in <\zeta>$ が入っている 各 box の右隣の box には $\zeta\delta$ が入っているものを $<\zeta>$ 図形と呼ぶことにする。

e.g. $\eta = \begin{matrix} i & i^2 & i^3 & 1 & i & i^2 \\ 1 & i & i^2 & i^3 & 1 & i \\ i^3 & 1 & i & i^2 & & \end{matrix}$ $(m = 4$ のとき$)$

(ii) $<\zeta>$ 図形 η と $\delta \in <\zeta>$ に対して、η に現れる δ の個数を $n_\delta(\eta)$ で表す。$n_{\zeta^j}(\eta) = n_j$ $(0 \leq j \leq m-1)$ である $<\zeta>$ 図形の集合を $D(n_0, n_1, n_2, ...n_{m-1})$ で表す。

(iii) $<\zeta>$ 図形 η の第 1 列を消去して得られる $<\zeta>$ 図形を η' で表す。$<\zeta>$ 図形 $\eta^{(j)}$ を $\eta^{(j)} = (\eta^{(j-1)})'$ により定める。

e.g. (i) の $<i>$ 図形 η に対して

$$\eta' = \begin{matrix} i^2 & i^3 & 1 & i & i^2 \\ i & i^2 & i^3 & 1 & i \\ 1 & i & i^2 & & \end{matrix}\ ,\quad \eta^{(2)} = \begin{matrix} i^3 & 1 & i & i^2 \\ i^2 & i^3 & 1 & i \\ i & i^2 & & \end{matrix}$$

$n_j := \dim V_{\zeta^j}$ $(0 \le j \le m-1)$ とおく。このとき、$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ の G_1 軌道は $D(n_0, n_1, n_2, ..., n_{m-1})$ を用いて、次のように分類される。

Proposition 1.2 (i) $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ に対して $V_1 \cup V_\zeta \cup V_{\zeta^2} \cup \ldots \cup V_{\zeta^{m-1}}$ に含まれる V の基底 $\{v_j^k; 1 \le k \le p, 0 \le j \le r_k\}$ で

$$v_0^k \xrightarrow{x} v_1^k \xrightarrow{x} v_2^k \xrightarrow{x} \ldots \xrightarrow{x} v_{r_k}^k \xrightarrow{x} 0,$$

$(xv_j^k = v_{j+1}^k \ (0 \le j \le r_k - 1),\ xv_{r_k}^k = 0)$
を満たすものが存在する。
(ii) 各 $1 \le k \le p$ に対して、$v_0^k \in V_{\delta_k}$ $(\delta_k \in <\zeta>)$ のとき、1つの行からなる $<\zeta>$ 図形 η_k を

$$\eta_k := \ \delta_k \quad \zeta\delta_k \quad \zeta^2\delta_k \quad \ldots \quad \zeta^{r_k}\delta_k$$

により定める。これらの和をとって、p 個の行からなる $<\zeta>$ 図形

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_p \in D(n_0, n_1, n_2, ..., n_{m-1})$$

を得る。このとき η は基底 $\{v_j^k\}$ の取り方に無関係で、x だけで決まる。そこで $\eta = \eta_x$ とおき、η_x を x の $<\zeta>$ 図形と呼ぶことにする。
(iii) (ii) の対応

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta) \to D(n_0, n_1, n_2, ...n_{m-1}), \quad x \mapsto \eta_x$$

は、全単射

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)/G_1 \simeq D(n_0, n_1, n_2, ...n_{m-1})$$

を定める。

(1.3) 巾零軌道の次元と closure relation

η と μ を1つの行からなる $<\zeta>$ 図形 とし、μ は q 個の 列をもっていて、$\delta \in <\zeta>$ で終わっているとする。このとき、η の第 q 列以前にある $\zeta\delta$ の個数を $\Delta(\eta, \mu)$ で表す。例えば $<i>$ 図形

$$\mu = \ i^2 \ \ i^3 \ \ 1 \ \ i \ \ i^2 \ \ i^3 \ \ 1 \ \ i\ , \quad \eta = \ i^3 \ \ 1 \ \ i \ \ i^2 \ \ i^3 \ \ 1 \ \ i \ \ i^2 \ \ i^3 \ \ 1 \ \ i \ \ i^2$$

に対して μ には8個の列があって、i で終わっているから、η の第1列から第8列までの i^2 の個数を数えて $\Delta(\eta, \mu) = 2$ である。

一方、上の μ と

$$\eta = 1 \quad i \quad i^2 \quad i^3 \quad 1 \quad i$$

に対して、η には第6列までしかないから、すべての列が第8列以前にあると理解して、η の i^2 の個数を数えて $\Delta(\eta,\mu)=1$ である。

これを用いて巾零軌道の次元が次のように記述される。

Proposition 1.3 巾零元 $x\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ に対して、 $\eta=\eta_x\in D(n_0,n_1,n_2,....n_{m-1})$ を対応する $<\zeta>$ 図形とする。 η を1つの行からなる $<\zeta>$ 図形 η_j の和として

$$\eta=\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_p$$

と表すとき、$\mathrm{Ad}(G_1)x$ の次元は次のように与えられる。

$$\dim \mathrm{Ad}(G_1)x = n_0n_1+n_1n_2+....+n_{m-2}n_{m-1}+n_{m-1}n_0-\sum_{1\le i,j\le p}\Delta(\eta_i,\eta_j)$$

次に、巾零軌道の closure relation について簡単に判ることを述べる。$m=1,2$ の場合には、巾零軌道の closure relation はそれぞれ Young 図形、あるいは ab 図形 ($<-1>$ 図形) のある順序を用いて記述される ($m=2$ の場合は [O2] 参照)。ab 図形の順序の一般化として $<\zeta>$ 図形の順序を次のように定義する。

Definition 1.4 $<\zeta>$ 図形 $\eta,\mu\in D(n_0,n_1,n_2,....n_{m-1})$ に対して、すべての $\delta\in<\zeta>$ と $j\ge 0$ に対して $n_\delta(\eta^{(j)})\ge n_\delta(\mu^{(j)})$ が成り立つとき、$\eta\ge\mu$ と書く。

巾零元 $x\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)$ の $<\zeta>$ 図形 を $\eta=\eta_x$ とかくとき、$\delta\in<\zeta>$ と $j\ge 0$ に対して

$$\mathrm{rk}(x^j|V_{\zeta^{-j}\delta}:V_{\zeta^{-j}\delta}\to V_\delta)=n_\delta(\eta^{(j)})$$

が成り立つ。これから容易に次のことが判る。

Proposition 1.5 巾零軌道 $\mathcal{O}_j\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}_\zeta)/G_1$ $(j=1,2)$ に対して $\eta_j\in D(n_0,n_1,n_2,....n_{m-1})$ を対応する $<\zeta>$ 図形とする。このとき $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ の Zariski closure $\overline{\mathcal{O}_1}$ に含まれるなら $\eta_1\ge\eta_2$ が成り立つ。

$$\overline{\mathcal{O}_1}\supset\mathcal{O}_2\Rightarrow\eta_1\ge\eta_2$$

$m=1$ 、$m=2$ のときは Proposition 1.5 の逆が成り立つ ($m=2$ のときは [O2] 参照)。これより、次のことが成り立つのではないかと予想される。

Conjecture 1.6 Proposition 1.5 の仮定のもとで、次が成り立つ。

$$\overline{\mathcal{O}_1} \supset \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \eta_1 \geq \eta_2.$$

§2 dual pair $(U(p,q),U(r,s))$ の moment map の幾何

(2.1) moment map

V を有限次元複素ベクトル空間、$s_V: V \to V$ を 線形な対合とする。このような対 (V, s_V) を対合つきベクトル空間と呼ぶことにする。$GL(V)$ の対合 θ_V を $\theta_V(g) = s_V g s_V$ $(g \in GL(V))$ により定め、次のようにおく。

$$V_a := \{v \in V; s_V v = v\}, \quad V_b := \{v \in V; s_V v = -v\},$$

$$n_a := \dim V_a, \quad n_b := \dim V_b,$$

$$K(V) := GL(V)_1 = \{g \in GL(V); \theta_V(g) = g\} \simeq GL(V_a) \times GL(V_b),$$

$$\mathfrak{k}(V) := \mathfrak{gl}(V)_1 = \{X \in \mathfrak{gl}(V); \theta_V(X) = X\},$$

$$\mathfrak{s}(V) := \mathfrak{gl}(V)_{-1} = \{X \in \mathfrak{gl}(V); \theta_V(X) = -X\}$$

$(GL(V), K(V))$ は実 Lie 群 $U(n_a, n_b)$ に対応する対称対となる。(1.2) により $\mathfrak{s}(V)$ の $K(V)$ 軌道は $< -1 >$ 図形により分類される；

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V))/K(V) \simeq D(n_a, n_b)$$

$a=1$、$b=-1$ とみて、$D(n_a,n_b)$ は a の個数が n_a、b の個数が n_b の ab 図形と考える。

(U, s_U) をもう1つの対合つきベクトル空間とし、θ_U, U_a, U_b, $K(U)$, $\mathfrak{k}(U)$, $\mathfrak{s}(U)$ を上と同様に定める。また、$m_a = \dim U_a$, $m_b = \dim U_b$ とおく。$(GL(U), K(U))$ は $U(m_a, m_b)$ に対応する対称対である。

(V, s_V) と (U, s_U) に対して

$$L := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, U)$$

とおく。 $GL(V)\times GL(U)$ は次のように L に作用する。

$$(g,h)(P,Q)=(gPh^{-1},hQg^{-1})((g,h)\in GL(V)\times GL(U),(P,Q)\in L)$$

また、2つの写像

$$\mathfrak{gl}(V)\xleftarrow{\rho} L\xrightarrow{\pi}\mathfrak{gl}(U),\quad \rho(P,Q)=PQ,\quad \pi(P,Q)=QP\ ((P,Q)\in L)$$

は $GL(V)\times GL(U)$ 同変写像となる。また、L の部分空間

$$L_+:=\{(P,Q)\in L; s_VPs_U=P, s_UQs_V=-Q\}$$

をとり、ρ,π を L_+ に制限すると $K(V)\times K(U)$ 同変写像

$$\mathfrak{s}(V)\xleftarrow{\rho} L_+\xrightarrow{\pi}\mathfrak{s}(U)$$

を得る。この写像が dual pair $(U(n_a,n_b),U(m_a,m_b))\hookrightarrow Sp(L_{\mathbf{R}})$ の本来の moment map

$$\mathfrak{u}(n_a,n_b)^*\leftarrow L_{\mathbf{R}}\rightarrow\mathfrak{u}(m_a,m_b)^*$$

のある意味での $K_{\mathbb{C}}$-version になっているのだが、これについて簡単に触れたい。詳細については省略するが、次のものを構成できる。

(a) L 上の 非退化な symplectic form $(\ ,\ )_L$

(b) L の実部分空間 $L_{\mathbf{R}}$ で $\dim_{\mathbf{R}}L_{\mathbf{R}}=\dim L$、$L_{\mathbf{R}}\otimes\mathbb{C}=L$、かつ $(\ ,\ )_L|L_{\mathbf{R}}$ は実数値をとる非退化な symplectic form となるもの

(c) $GL(V)$ (resp. $GL(U)$) の実型 $GL(V)_{\mathbf{R}}\simeq U(n_a,n_b)$ (resp. $GL(U)_{\mathbf{R}}\simeq U(m_a,m_b)$) で Cartan involution $\theta_V|GL(V)_{\mathbf{R}}$ (resp. $\theta_U|GL(U)_{\mathbf{R}}$) をもつもの

そして、次が成り立つ。

Proposition 2.1 (i) $GL(V)_{\mathbf{R}}$ と $GL(U)_{\mathbf{R}}$ の L への可換な作用は $L_{\mathbf{R}}$ を安定にし、$(\ ,\ )_L$ を不変にする。

$$(GL(V)_{\mathbf{R}},GL(U)_{\mathbf{R}})\hookrightarrow Sp(L_{\mathbf{R}})$$

(ii) $-i\rho(L_{\mathbf{R}})\subset\mathfrak{gl}(V)_{\mathbf{R}}=Lie(GL(V)_{\mathbf{R}})$ かつ $i\pi(L_{\mathbf{R}})\subset\mathfrak{gl}(U)_{\mathbf{R}}=Lie(GL(U)_{\mathbf{R}})$ が成り

(iii) V (resp. U) 上の trace form による同一視 $\mathfrak{gl}(V)_{\mathbf{R}} \simeq \mathfrak{gl}(V)^*_{\mathbf{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{gl}(V)_{\mathbf{R}}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{gl}(U)_{\mathbf{R}} \simeq \mathfrak{gl}(U)^*_{\mathbf{R}}$) によって、$-i\rho|L_{\mathbf{R}} : L_{\mathbf{R}} \to \mathfrak{gl}(V)^*_{\mathbf{R}}$ (resp. $i\pi|L_{\mathbf{R}} : L_{\mathbf{R}} \to \mathfrak{gl}(U)^*_{\mathbf{R}}$) は $GL(V)_{\mathbf{R}}$ (resp. $GL(U)_{\mathbf{R}}$) の symplectic 多様体 $(L_{\mathbf{R}}, (\ ,\ )_L|L_{\mathbf{R}})$ への作用に関する moment map に一致する。(moment map の定義は、例えば [F] を参照されたい。)

(iv) L_+ は $(L, (\ ,\ )_L)$ の maximally totally isotropic subspace である。

これによって

$$\mathfrak{gl}(V)_{\mathbf{R}} \overset{-i\rho|L_{\mathbf{R}}}{\longleftarrow} L_{\mathbf{R}} \overset{i\pi|L_{\mathbf{R}}}{\longrightarrow} \mathfrak{gl}(U)_{\mathbf{R}}$$

は moment map であり、

$$\mathfrak{gl}(V) \overset{-i\rho}{\longleftarrow} L \overset{i\pi}{\longrightarrow} \mathfrak{gl}(U)$$

はその複素化である。我々の写像の定数倍

$$\mathfrak{s}(V) \overset{-i\rho|L_+}{\longleftarrow} L_+ \overset{i\pi|L_+}{\longrightarrow} \mathfrak{s}(U)$$

は複素化された moment map の maximally totally isotropic subspace L_+ への制限になっている。

以下、$\mathfrak{s}(V) \overset{\rho}{\leftarrow} L_+ \overset{\pi}{\rightarrow} \mathfrak{s}(U)$ を moment map と呼ぶことにする。

(2.2) moment map の幾何

(V, s_V)、(U, s_U) を (2.1) の通りとし、

$$W := V \oplus U, \quad G := GL(W), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(W)$$

とおく。W の自己同型 $S : W \to W$ を

$$S = \begin{pmatrix} s_V & 0 \\ 0 & -is_U \end{pmatrix}$$

により定め、

$$\Theta : G \to G, \quad \Theta(g) = SgS^{-1} \ (g \in G)$$

とおくと Θ は G の order 4 の自己同型となり、Θ 表現 $(G_1, \mathfrak{g}_i)$ を得る。明らかに

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} ; g \in K(V),\ h \in K(U) \right\} \simeq K(V) \times K(U).$$

$$\Theta\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_V A s_V & i s_V B s_U \\ -i s_U C s_V & s_U D s_U \end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathfrak{g}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}; P \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U,V),\ Q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,U),\ s_V P s_U = P,\ s_U Q s_V = -Q \right\} \simeq L_+$$

となる。また、同型

$$L_+ \simeq \mathfrak{g}_i, \quad (P,Q) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

は $G_1 = K(V) \times K(U)$ 同変である。

Remark 2.2 (i) $V_a = W_1$, $U_b = W_i$, $V_b = W_{-1}$, $U_a = W_{-i}$ と

$$\mathfrak{g}_i = \{X \in \mathrm{End}(W); XW_\delta \subset W_{i\delta}\ (\delta \in < i >)\}$$

であることから $\mathfrak{g}_i$ は線形写像 $W_\delta \to W_{i\delta}$ $(\delta \in < i >)$ の4つ組

$$\mathfrak{g}_i = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & Q_a & & \\ & V_a & \rightarrow & U_b & \\ P_a & \uparrow & & \downarrow & P_b \\ & U_a & \leftarrow & V_b & \\ & & Q_b & & \end{array} \right\}$$

とみることができる。

(ii) $X = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_i$ に対して

$$X^2 = \begin{pmatrix} PQ & 0 \\ 0 & QP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(X) & 0 \\ 0 & \pi(X) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\rho(X) = X^2|_V \ \text{ and } \ \pi(X) = X^2|_U$$

である。

(1.2) により、次の全単射がある。

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V))/K(V) \simeq D(n_a, n_b),\ C_\eta \leftrightarrow \eta$$

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(U))/K(U) \simeq D(m_a, m_b),\ C_\sigma \leftrightarrow \sigma$$

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/G_1 = \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/K(V) \times K(U) \simeq D(n_a, m_b, n_b, m_a),\quad \mathcal{O}_\mu \leftrightarrow \mu$$

ここで $D(n_a, n_b)$、$D(m_a, m_b)$ は $a = 1$、$b = -1$ によって ab 図形の集合とみておく。

$\mathcal{O}_\mu \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/K(V) \times K(U)$ の像 $\rho(\mathcal{O}_\mu)$ (resp. $\pi(\mathcal{O}_\mu)$) は明らかに $\mathfrak{s}(V)$ (resp. $\mathfrak{s}(U)$) の巾零 $K(V)$ 軌道 (resp. $K(U)$ 軌道) であるから、ab 図形 $\rho(\mu) \in D(n_a, n_b)$ と $\pi(\mu) \in D(m_a, m_b)$ を

$$\rho(\mathcal{O}_\mu) = C_{\rho(\mu)},\quad \pi(\mathcal{O}_\mu) = C_{\pi(\mu)}$$

により定義する。$\rho(\mu)$、$\pi(\mu)$ が次のように与えられることは、容易に判る。

Proposition 2.3 $< i >$ 図形 $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ に対して、$\rho(\mu)$ は μ から $\pm i$ を消し、1 と -1 をそれぞれ a と b で置き換えた ab 図形である。一方、$\pi(\mu)$ は μ から ± 1 を消し、$-i$ と i をそれぞれ a と b で置き換えた ab 図形である。

Example $\mu = \begin{array}{llllll} i & -1 & -i & 1 & i & -1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 & & \end{array} \in D(4,5,4,3)$

に対して

$$\rho(\mu) = \begin{array}{lll} b & a & b \\ a & b & a \\ a & b & \end{array} \quad \text{and} \quad \pi(\mu) = \begin{array}{lll} b & a & b \\ b & a & b \\ a & b & \end{array}$$

である。

$d_a := n_a - m_a$、$d_b := n_b - m_b$ とおく。$\mathfrak{s}(V)$ と $\mathfrak{s}(U)$ の巾零軌道の対応 (θ-lifting) が、上手く定まるための仮定として、これ以降、次の仮定をおく。

Assumption 2.4 (i) $\min\{n_a, n_b\} \geq \max\{m_a, m_b\}$

(ii) $d_a > 0$ or $d_b > 0$

このとき、次が成り立つ。

Proposition 2.5 ([O2, Proposition 3]) (i) $\pi : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{s}(U)$ は全射である。また、像 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ は次のように与えられる。

$$\rho(\mathfrak{g}_i) = \{X \in \mathfrak{s}(V); \mathrm{rk}(X|V_a : V_a \to V_b) \leq m_b,\ \mathrm{rk}(X|V_b : V_b \to V_a) \leq m_a\}$$

(ii) $\pi:\mathfrak{g}_i\to\mathfrak{s}(U)$ と $\rho:\mathfrak{g}_i\to\mathfrak{s}(V)$ はそれぞれ $K(V)$、$K(U)$ による商写像である。即ち、次が成り立つ。

$$\pi^*(\mathbb{C}[\mathfrak{s}(U)])=\mathbb{C}[\mathfrak{g}_i]^{K(V)} \text{ and } \rho^*(\mathbb{C}[\mathfrak{s}(V)])=\mathbb{C}[\mathfrak{g}_i]^{K(U)}$$

moment map を通して巾零軌道の対応が上手くいっている部分として、$\mathfrak{g}_i, \mathfrak{s}(V), \mathfrak{s}(U)$ の次の部分集合 $\mathfrak{g}_i', \mathfrak{s}(V)', \mathfrak{s}(U)'$ をそれぞれとる。

$$\mathfrak{g}_i':=\left\{\begin{pmatrix}0 & P\\ Q & 0\end{pmatrix};\mathrm{rk}(P)\text{、}\mathrm{rk}(Q)\text{ は最大}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{ccccc} & & Q_a & & \\ & V_a & \rightarrow & U_b & \\ P_a & \uparrow & & \downarrow & P_b \\ & U_a & \leftarrow & V_b & \\ & & Q_b & & \end{array};Q_a,\ Q_b\text{ は全射、}P_a,\ P_b\text{ は単射}\right\},$$

$$\mathfrak{s}(V)':=\{X\in\mathfrak{s}(V);\mathrm{rk}(X|V_a:V_a\to V_b)=m_b,\ \mathrm{rk}(X|V_b:V_b\to V_a)=m_a\},$$

$$\mathfrak{s}(U)':=\{Y\in\mathfrak{s}(U);\mathrm{rk}(Y|U_a:U_a\to U_b)\geq m_b-d_a,\ \mathrm{rk}(Y|U_b:U_b\to U_a)\geq m_a-d_b\}$$

定義より、$\mathfrak{g}_i'$ (resp. $\mathfrak{s}(U)'$) は $\mathfrak{g}_i$ (resp. $\mathfrak{s}(U)$) の open subvariety であり、$\mathfrak{s}(V)'$ は $\rho(\mathfrak{g}_i)$ で open な $\mathfrak{s}(V)$ の locally closed subvariety である。ρ、π を通して、これらの部分集合は対応して、その制限は良い性質をもつ。即ち、次が成り立つ。

Proposition 2.6 (cf. [O2, Lemma 9]) (i) $\pi(\mathfrak{g}_i')=\mathfrak{s}(U)'$、$\rho(\mathfrak{g}_i')=\mathfrak{s}(V)'$
(ii) 制限 $\rho|_{\mathfrak{g}_i'}:\mathfrak{g}_i'\to\mathfrak{s}(V)'$ は古典位相で locally trivial であって typical fibre $K(U)$ をもつ。
(iii) $\pi|_{\mathfrak{g}_i'}:\mathfrak{g}_i'\to\mathfrak{s}(U)'$ は relative dimension $(n_a+n_b)(m_a+m_b)-2m_am_b$ の smooth morphism である。

これは (iii) の relative dimension を除いて、[O2] の結果である。relative dimension の計算には (1.3) の次元公式が用いられる。

Remark 2.7(cf, [KP2, 12.2]) $f:X\to Y$ を 複素代数多様体の relative dimension r の smooth morphism とし、$f(x)=y$ $(x\in X)$ とする。このとき $x\in X$ と $(y,0)\in Y\times\mathbb{C}^r$ の古典位相での近傍が存在して、それらは解析的に同型になる。

さて、1つの列からなる次の ab 図形を考える。

$$\mathbf{d} = \begin{array}{cc} a & \uparrow \\ \vdots & d_a \\ a & \downarrow \\ b & \uparrow \\ \vdots & d_b \\ b & \downarrow \end{array}$$

$\mathfrak{g}_i'$、$\mathfrak{s}(V)'$、$\mathfrak{s}(U)'$ に含まれる巾零軌道の対応物として、次の図形の集合を考える。

$$D(n_a, m_b, n_b, m_a)' := \{\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a); \mu \text{ の各行は } \pm 1 \text{ で始まり、} \pm 1 \text{ で終わる}\}$$

$$D(n_a, n_b)' := \{\eta \in D(n_a, n_b);\ \eta \text{ の第 1 列は } \mathbf{d} \text{ に一致する}\}$$

$$D(m_a, m_b)' := \{\sigma \in D(m_a, m_b); n_a(\sigma_1) \leq d_b,\ n_b(\sigma_1) \leq d_a\},$$

ここで、σ_1 は σ の第 1 列である。$\sigma \in D(m_a, m_b)$ に対して、$\sigma \in D(m_a, m_b)'$ となるための必要十分条件は $\eta \in D(n_a, n_b)$ で $\eta' = \sigma$ かつ、η の第 1 列が $\mathbf{d}$ に一致するものが存在することである。次のことは容易に判る。

Lemma 2.8 (i) $< i >$ 図形 $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ に対応する巾零軌道 $\mathcal{O}_\mu \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/K(V) \times K(U)$ に対して $\mathcal{O}_\mu \subset \mathfrak{g}_i'$ となるための必要十分条件は $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)'$ となることである;

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)/K(V) \times K(U) \simeq D(n_a, m_b, n_b, m_a)'$$

(ii) ab 図形 $\eta \in D(n_a, n_b)$ に対応する巾零軌道 $C_\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V))/K(V)$ に対して、$C_\eta \subset \mathfrak{s}(V)'$ となるための必要十分条件は $\eta \in D(n_a, n_b)'$ となることである;

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V) \simeq D(n_a, n_b)'$$

(iii) ab 図形 $\sigma \in D(m_a, m_b)$ に対応する巾零軌道 $C_\sigma \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U))/K(U)$ に対して $C_\sigma \subset \mathfrak{s}(U)'$ となるための必要十分条件は $\sigma \in D(m_a, m_b)'$ となることである;

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U) \simeq D(m_a, m_b)'$$

次の定理は本稿の主定理である。

Theorem 2.9 (i) $\rho|_{\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')} : \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i') \to \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')$ は古典位相で locally trivial であって typical fibre $K(U)$ をもつ。

(ii) $\pi|_{\mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)} : \mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i) \to \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')$ は relative dimension $(n_a+n_b)(m_a+m_b) - 2m_a m_b$ の smooth morphism である。

(iii) ρ, π は次の全単射を定める。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V) & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & \mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)/K(V)\times K(U) & \overset{\pi}{\Longrightarrow} & \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ D(n_a,n_b)' & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & D(n_a,m_b,n_b,m_a)' & \overset{\pi}{\Longrightarrow} & D(m_a,m_b)' \end{array}$$

(iv) (iii) の全単射は closure relation を保つ。即ち、$\mathcal{O}_{\mu_j} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)/K(V)\times K(U)$ $(j=1,2)$ と対応する軌道 $C_{\rho(\mu_j)} = \rho(\mathcal{O}_{\mu_j}) \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V)$, $C_{\pi(\mu_j)} = \pi(\mathcal{O}_{\mu_j}) \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U)$ について、次が成り立つ。

$$\overline{C_{\rho(\mu_1)}} \supset C_{\rho(\mu_2)} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}_{\mu_1}} \supset \mathcal{O}_{\mu_2} \Leftrightarrow \overline{C_{\pi(\mu_1)}} \supset C_{\pi(\mu_2)}$$

この定理の (i), (ii) は Proposition 2.6 の smooth morphism $\rho|_{\mathfrak{g}'_i} : \mathfrak{g}'_i \to \mathfrak{s}(V)'$, $\pi|_{\mathfrak{g}'_i} : \mathfrak{g}'_i \to \mathfrak{s}(U)'$ は $\mathfrak{g}'_i$ の部分多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)$ に制限しても、同じ性質をもつことを示している。さらに、(iii), (iv) はこれらが誘導する軌道の対応

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V) \overset{\rho|\mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)}{\longleftarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)/K(V)\times K(U) \overset{\pi|\mathcal{N}(\mathfrak{g}'_i)}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U)$$

は巾零軌道同士の closure relation を保つ 1 対 1 対応になっていてることを言っているが、これから定まる対応

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U) \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V)$$

が西山氏の stable range の場合の θ-lifting の一般化になっている (cf, Remark 2.16,(ii))。(iii) は $< i >$ 図形と ab 図形の combinatorial な考察から、(iv) は ρ, π が quotient map であることと、Remark 2.7 から得られる。

Remark 2.10 $D(n_a,n_b)'$ と $D(m_a,m_b)'$ の定義により、対応 $\eta \mapsto \eta'$ は全単射

$$D(n_a,n_b)' \rightrightarrows D(m_a,m_b)'$$

を定める。Theorem 2.9, (iii) からくる全単射 $D(n_a,n_b)' \rightrightarrows D(m_a,m_b)'$ は上の全単射に一致する。

$$\pi((\rho|D(n_a,m_b,n_b,m_a)')^{-1}(\eta)) = \eta' \ (\eta \in D(n_a,n_b)')$$

従って、θ-lifting の一般化は、ab 図形の対応としては、第 1 列を消去することに対応する。

さて、Theorem 2.9 では、ρ, π を巾零多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)$ の良い部分 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')$ に制限して得られる結果だが、$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)$ 全体で考えて、次が成り立つ。

Proposition 2.11 Theorem 2.9,(iii) の全単射によって $\eta \in D(n_a, n_b)'$ に対応する図形をそれぞれ $\tilde{\eta} \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)'$、$\eta' \in D(m_a, m_b)'$ とする。また、これらの図形に対応する軌道をそれぞれ $C_\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V)$、$\mathcal{O}_{\tilde{\eta}} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}_i')/K(V) \times K(U)$、$C_{\eta'} \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U)$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $\rho^{-1}(C_\eta) = \mathcal{O}_{\tilde{\eta}}$

(ii) $\pi(\rho^{-1}(C_\eta)) = C_{\eta'}$

(iii) $\rho(\pi^{-1}(\overline{C_{\eta'}})) = \overline{C_\eta}$

(iv) $\pi^{-1}(\overline{C_{\eta'}}) = \bigcup_{\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a),\ \mu \leq \tilde{\eta}} \mathcal{O}_\mu$

ここに $\mathcal{O}_\mu$ は $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ に対応する $\mathfrak{g}_i$ の巾零 $K(V) \times K(U)$ 軌道であり、$\leq$ は Definition 1.4 の順序である。

(i), (ii), (iii) は本質的に [O2, Lemma 10] の結果である。

(vi) を証明するには $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ に対して $D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ 及び $D(m_a, m_b)$ の順序で、

$$\mu \leq \tilde{\eta} \Leftrightarrow \pi(\mu) \leq \pi(\tilde{\eta}) \quad \ldots (*)$$

を示さなくてはならない。$(*)$ の $\Leftarrow$ については、rank の計算から得られる次の Lemma 2.12 を用いる。

Lemma 2.12 (i) $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ と $\ell \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

$$n_i(\mu^{(2\ell)}) = n_b(\pi(\mu)^{(\ell)}),\ n_{-i}(\mu^{(2\ell)}) = n_a(\pi(\mu)^{(\ell)}),$$

$$n_1(\mu^{(2\ell)}) \leq n_a(\pi(\mu)^{(\ell-1)}),\ n_{-1}(\mu^{(2\ell)}) \leq n_b(\pi(\mu)^{(\ell-1)}),$$

$$n_1(\mu^{(2\ell+1)}) \leq n_a(\pi(\mu)^{(\ell)}),\ n_{-1}(\mu^{(2\ell+1)}) \leq n_b(\pi(\mu)^{(\ell)}),$$

$$n_i(\mu^{(2\ell+1)}) \leq n_b(\pi(\mu)^{(\ell)}),\ n_{-i}(\mu^{(2\ell+1)}) \leq n_a(\pi(\mu)^{(\ell)})$$

(ii) $\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)'$ ならば (i) の不等号はすべて等号になる。

$(*)$ の $\Rightarrow$ については、図形の combinatorial な計算から容易に得られる、次の Lemma を用いる。

Lemma 2.13 図形の対応

$$D(n_a, n_b) \xleftarrow{\rho} D(n_a, m_b, n_b, m_a) \xrightarrow{\pi} D(m_a, m_b)$$

を仮定 Assumption 2.4 なしに考える。このとき、$\mu \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ と $k \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

$$n_1(\mu^{(2k)}) = n_a(\rho(\mu)^{(k)}),\ n_{-1}(\mu^{(2k)}) = n_b(\rho(\mu)^{(k)})$$

$$n_i(\mu^{(2k)}) = n_b(\pi(\mu)^{(k)}),\ n_{-i}(\mu^{(2k)}) = n_a(\pi(\mu)^{(k)})$$

特に $\mu_1, \mu_2 \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)$ に対して、$\mu_1 \geq \mu_2$ ならば、$\rho(\mu_1) \geq \rho(\mu_2)$、$\pi(\mu_1) \geq \pi(\mu_2)$ が成り立つ。

Remark 2.14 Proposition 2.11 の設定で

(i) もし Conjecture 1.6 が正しければ

$$\pi^{-1}(\overline{C_{\eta'}}) = \overline{\mathcal{O}_{\tilde{\eta}}}$$

が成り立つ。特に、$\pi^{-1}(\overline{C_{\eta'}})$ は既約である。

(ii) $\pi^{-1}(C_{\eta'})$ は一般に、1つの $K(V) \times K(U)$ 軌道にはならない。

(iii) $\pi(\rho^{-1}(\overline{C_\eta})) \supset \overline{C_{\eta'}}$ であるが、等号は一般には成り立たない。

Example $n_a = 5$, $n_b = 3$, $m_a = m_b = 2$ の場合を考える。このとき、$d_a = 5 - 2 = 3$、$d_b = 3 - 2 = 1$。

$$\eta = \begin{array}{ccc} a & b & a \\ a & b & \\ b & a & \\ a & & \end{array} \quad \in D(5,3)$$

に対して、η の第1列の a (resp. b) の個数は $3 = d_a$ (resp. $1 = d_b$) であるから $\eta \in D(5,3)'$。このとき、

$$\tilde{\eta} = \begin{array}{ccccc} 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & i & -1 & & \\ -1 & -i & 1 & & \end{array} \quad \in D(5,2,3,2)'$$

は $\rho(\tilde{\eta}) = \eta$ となる唯1つの $D(5,2,3,2)$ の元である。従って、 $\rho^{-1}(C_\eta) = \mathcal{O}_{\tilde{\eta}}$ である。明らかに

$$\pi(\tilde{\eta}) = \eta' = \begin{array}{ll} b & a \\ b & \\ a & \end{array} \in D(2,2)'$$

は、η から第1列を消去して得られる ab 図形である。

$$\tilde{\eta}, \quad \begin{array}{lll} i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{array} \in \pi^{-1}(\eta')$$

であるから、$\pi^{-1}(C_{\eta'})$ は1つの $K(V) \times K(U)$ 軌道とはならない。

$$\sigma = \begin{array}{lll} a & b & a \\ a & & \\ a & & \\ a & & \\ b & & \\ b & & \end{array} \in D(5,3) \setminus D(5,3)'$$

をとると、$\sigma \leq \eta$ ($\Leftrightarrow C_\sigma \subset \overline{C_\eta}$) が判る。

$$\mu := \begin{array}{lllllll} -i & 1 & i & -1 & -i & 1 & i \\ 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \end{array} \in \rho^{-1}(\sigma)$$

と $\pi(\mu) = abab \in D(2,2)$ より、

$$\pi(\rho^{-1}(\overline{C_\eta})) \supset C_{\pi(\mu)} \not\subset \overline{C_{\eta'}}$$

よって $\pi(\rho^{-1}(\overline{C_\eta})) \neq \overline{C_{\eta'}}$ である。

次に、Theorem 2.9, (iii) で対応する3つの軌道の閉包の特異点の関係について述べる。そのために、次の概念を導入する。

Definition 2.15 ([KP2]) 2つの代数多様体 X、Y と点 $x \in X$、$y \in Y$ をとる。代数多様体 Z、点 $z \in Z$ 及び、2つの morphism $Y \xleftarrow{\psi} Z \xrightarrow{\varphi} X$ が存在して、$\varphi(z) = x$、$\psi(z) = y$ かつ、φ、ψ が z で smooth となるとき、X の x における特異点は Y の y における特異点に smoothly equivalent であるという。これは、明らかに点付き多様体 (X, x) の同値類を定める。(X, x) が属する同値類を $Sing(X, x)$ で表す。

代数群 G が代数多様体 X に作用していて、2つの点 x、x' が X の同じ G 軌道 $\mathcal{O}$ に属するとする。このとき、$Sing(X, x) = Sing(X, x')$ であるから、この同値類を $Sing(X, \mathcal{O})$ で表す。

Proposition 2.6 を用いて次のことが証明される。

Theorem 2.15 Theorem 2.9,(iii) によって、2つの $<i>$ 図形 $\tilde{\eta}, \tilde{\sigma} \in D(n_a, m_b, n_b, m_a)'$ に対応する ab 図形を $\eta = \rho(\tilde{\eta}), \sigma = \rho(\tilde{\sigma}) \in D(n_a, n_b)'$, $\eta' = \pi(\tilde{\eta}), \sigma' = \pi(\tilde{\sigma}) \in D(m_a, m_b)'$ とする。$\mathcal{O}_{\tilde{\sigma}} \subset \overline{\mathcal{O}_{\tilde{\eta}}}$ とすれば、$C_\sigma \subset \overline{C_\eta}$、$C_{\sigma'} \subset \overline{C_{\eta'}}$ であるが、次が成り立つ。

$$Sing(\overline{C_\eta}, C_\sigma) = Sing(\overline{\mathcal{O}_{\tilde{\eta}}}, \mathcal{O}_{\tilde{\sigma}}) = Sing(\overline{C_{\eta'}}, C_{\sigma'})$$

Remark 2.16 (i) $\mathfrak{s}(U) = \mathfrak{s}(U)'$、即ち $\mathfrak{s}(U)$ が smooth morphism $\pi|_{\mathfrak{g}_i'} : \mathfrak{g}_i' \to \mathfrak{s}(U)'$ の像に一致するという条件を読みかえると

$\mathfrak{s}(U) = \mathfrak{s}(U)'$
$\Leftrightarrow m_b - d_a \leq 0,\ m_a - d_b \leq 0$
$\Leftrightarrow m_a + m_b \leq \min\{n_a, n_b\}$
$\Leftrightarrow$ dual pair $(U(n_a, n_b), U(m_a, m_b))$ は stable range にある
となる。

(ii) dual pair $(U(n_a, n_b), U(m_a, m_b))$ が stable range にあるとき、西山氏は $C' \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(U))/K(U)$ に対して、$C \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V))/K(V)$ が存在して

$$\rho(\pi^{-1}(\overline{C'})) = \overline{C}$$

となることを証明し、対応 $C' \mapsto C$ を巾零軌道の θ-lifting と呼んでいる。Theorem 2.9,(iii) からくる対応 (Remark 2.10 の写像の逆)

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}(U)')/K(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\mathfrak{s}(V)')/K(V)$$

は、Proposition 2.11,(iii) により、西山氏の θ-lifting の一般化になっている。

文献

[F] 深谷賢治、シンプレクティック幾何学、岩波講座・現代数学の展開

[KP1] H. Kraft and C. Procesi, Minimal singularity in GL_n, Invent. Math. 62 (1981), 503-515.

[KP2] H. Kraft and C. Procesi, On the geometry of conjugacy classes in classical groups, Comment. Math. Helv. 57 (1982), 539-602.

[N1] K. Nishiyama, Theta lifting of two-step nilpotent orbits for the pair $O(p,q)\times Sp(2n,\mathbb{R})$, in H. Heyer, T. Hirai and N. Obata (eds.), Infinite Dimensional Harmonic Analysis, Transactions of a Japanese-German Symposium held from September 20th to 24th, 1999 at Kyoto University, 278 – 289, Kyoto 1999.

[N2] K. Nishiyama, Multiplicity-free actions and the geometry of nilpotent orbits, Math. Ann., 318,(2000), 777 - 793.

[N3] 西山亨、巾零軌道とリー群の表現論、2000 年度代数学シンポジウム報告集

[N4] K. Nishiyama, Theta lifting of holomorphic discrete series II, In preparation.

[NOT] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules-Hermitian symmetric case-, Astérisque 273 (2001), 13 - 80.

[NZ] K. Nishiyama and C. Zhu, Theta lifting of holomorphic discrete series. The case of $(U(p,q),U(r,s))$, Trans. AMS 353(2001), 3327-3345.

[O1] T. Ohta, The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs, Tohoku Math. J. 38(1986),441-468.

[O2] T. Ohta, The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities, Tohoku Math. J. 43(1991),161-211.

[Y] H. Yamashita, Cayley trasform and generalized Whittaker models for irreducible hightest modules, to apper in Astérisque.